Kapitulli

Programimi linear i plote

1-Hyrje

Për të gjetur një zgjidhje optimale brenda një bashkesie zgjidhjesh të mundshme, një algoritëm duhet të përmbajë një strategji kërkimi të zgjidhjeve dhe një metodë verfifikimi qe një zgjidhje e veçantë e gjetur është pikërisht ajo e kërkuara. Për shembull, në metodës e simplex strategjia e kërkimit, dmth pasi jepet nje zgjidhje gjenerohet një tjetër afër me këtë. Në rastin e simplex jepen si fqinje dy baza qe ndryshojnë nga një indeks i vetëm (një baze korrespondon me kufizimet aktive që përkufizon kulmin). Zgjedhja e bazës se afërt është bërë në mënyrë që të përmirësohet objektivi . Metoda e verifikimit është e bazuar në karakteristikat e dualitetit te PL: Në çdo iteracion, eshte e disponueshme dhe një variabël e dyfishtë vlera e të ciles, per nga ndërtimi, e njëjtë me variablen paraprake. Nëse kjo variabël e dyfishtë eshte e lejueshme?, atëherë është provuar optimaliteti i zgjidhjes. Vini re një fakt shumë të rëndësishëm. Ekzistenca e një çifti variablash paraprake - dyfishe te pranueshme dhe me të njëjtën vlerë të funksionit objektiv përbëjnë një ‘test’, një certifikate optimaliteti. Ne momentin që kjo certifikate është në dispozicion jemi në gjendje të sigurohemi për optimalitetin *pavaresisht se cilat llogaritje janë çuar tek certifikata*. Vini re gjithashtu se kjo certifikate është e bazuar në idenë se një kufizim më i vogel se vlera optimale dhe një kufizim i sipërm përputhen. Kjo kornizë ëga pikëpamja kompjuterike e favorshme e PL nuk tregohet për fat të keq ne te gjitha problemet. Të dy komponentët e algoritmit, kërkimi dhe verifikimi, janë domosdoshmërisht të pranishme, por mund te ndodhe qe prova e optimizimit ka nevojë për informacionin që rrjedh nga llogaritjet e kaluara. Mund te ndodhë ajo qe nuk është në dispozicion një mekanizëm i thjeshtë verfikimi si në rastin e PL. Sipas teorisë së kompleksitetit kompjuterik, problemit qe" i jepet një zgjidhje x, a është ai me i miri? "i është dhënë një zgjidhje x, ekziston një zgjidhje më e mirë? "janë komplementare me njeri tjetrin (nëse për një problem përgjigja është po, për tjetrën është` jo "). Një certifikate për problemin e dytë mund të caktohet nga nje zgjidhje më e mirë y, dhe normalisht llogaritja për te percaktuar nese y eshte me i miri dhe x eshte polinomiale. Kjo sa për të thënë se problemi i dytë i perket klasës NP keshtu problemi i parë qëndron në klasën co-NP. Pyetja që lind eshte kjo, po në qoftë se problemi i parë i takon edhe klasës NP, sepse kjo do të siguronte dhe ekzistencën e një provë e optimale polinomiale. Sapo u pa se PL, në sajë të dualitetit është në këtë gjendje. Për fat të keq ka shumë probleme me interes të madh qe janë NP-të plotë dhe teoria ende sot nuk është në gjendje të tregojë nëse problemet NP-të plotë janë të zgjidhshme ne menyre polinomiale dhe nëse problemet plotësuese të NP-të plotë janë edhe në NP. Hamendësimi gjerësisht i ndarë për te dyja çështjet, është negativ, arsye per te cilen duhet pritur se kërkimi i optimizmit merr një kohë të gjatë dhe se, edhe pse ka gjetur optimalin, nuk është në gjendje ta njohin atë si të tillë deri pas një testi të rëndshem optimizimi. Tërë PL i takon klasës së problemeve NP-të plotë. Modelet e tërë PL (PLI), mbi te gjitha kur plotësimi eshte i kufizuar në vlerat 0 ose 1, ndërhyjnë kudo për shkak të fleksibiliteti te lartë modelues te variablave 0-1. Fatkeqësisht çmimi që duhet të paguanjme, është një kohë e gjatë llogaritje qoftë se duam zgjidhjen e saktë apo një zgjidhje të përafërt qoftë se duam një llogaritje të shpejtë.

2- Kufijtë e poshtëm.

Përbërësit që përdoren për të zgjidhur problemet e PLI janë në thelb dy: të gjenden kufijtë e poshtëm me të mire (kur duhet të minimizojmë, përndryshe kërkojmë kufijtë e sipërm), të cilët janë sa më afër të jetë e mundur optimale dhe te ndahet bashkësia e lejuar në mënyrë që të veprohet me probleme pak a shume të vogla dhe te kihen për këto probleme kufij te poshtëm me te mëdhenj. Për të gjetur kufij të poshtëm ekzistojnë metoda standarde, dhe janë ato që gjenden në një software komercial. Shpesh është e dobishme për të identifikuar kufizime të tjera që rrjedhin nga struktura të veçanta të problemit. Kjo në përgjithësi nuk është e lehte.

Për probleme PLI kufiri i poshtëm që përdoret zakonisht është për te çliruar kufizimin e tërësisë mbi variablat. Duke zgjeruar bashkësinë e lejuar, vlera optimale e relaksuar do te ketë një vlere qe nuk tejkalon (dhe ndoshta më te vogël) vlerën optimale te plote. Pyetja që duhet të kryhet gjithmonë në këto raste është nëse kufiri i poshtëm është mjaft e lartë. Nëse nuk është, duhet të përpiqemi ta përmirësojmë atë, përndryshe koha e llogaritjes mund të jetë penguese.

6.1 **Shembull**. Dhënë një graf, një nënbashkesi e nyjeve përkufizohet si mbulim nëse për cdo urë të paktë nje nga nyje e saj bën pjesë në nën bashkësi.
Të gjendet një mbulesë me kardinalitet minimal është NP ë veshtirë dhe për këtë arsye të modelohet problemi me PLI nuk të çon në një problem me vështirësi me te madhe. Le te jete G = (N, E) grafiku me N bashkësi te nyjeve $(n := |N|)$dhe E bashkesi e harqeve ose urave $(m := |E|)$. Duke qene se duam te identifikojmë një bashkësi nyjesh mund të mendojme që të lidhim çdo nyje *i* një variabël x_i e cila do të marrë vlerat 1 ose 0 në varësi të faktit nëse nyja *i* i përket, ose jo një mbulese. Për të gjetur një bashkësi me kardinalitet minimal mjafton të merret si objektiv:

$$\min \quad \sum_{i \in N} x_i$$

Për më tepër, duke qene se të paktën një nga dy nyjet fundore të çdo harku duhet t'i përkasë një mbulesë, mund të percaktojme kufizimet e mëposhtme:

$$x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (i,j) \in E$$

Pra problemi i PLI është:

$$\begin{aligned} v = \min \quad & \sum_{i \in N} x_i \\ & x_i + x_j \geq 1 \qquad \forall (i,j) \in E \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in N \end{aligned} \tag{1}$$

Relaksimi i plotësis dhe problemi i PL

$$\begin{aligned} v' = \min \quad & \sum_{i \in N} x_i \\ & x_i + x_j \geq 1 \qquad \forall (i,j) \in E \\ & x_i \geq 0 \qquad \forall i \in N \end{aligned} \tag{2}$$

Vini re se, rigorozisht, rilassamento e $x_i \in \{0,1\}$ è $0 \leq x_i \leq 1$. Megjithatë, duke qene se objektivi minimizon vlerat e x_i dhe kufizimi plotësohet dhe kur $x_i = 1$, vlerat me te mëdha se 1 nuk janë optimale dhe kështu janë përjashtuar në mënyrë implicite. Sa e keqe është vlera optimale e (2) në lidhje me (1)? Konsiderojme rastin e G grafik të plotë . Vini re se vlera $x_i = 1/2$ për çdo nyje eshte lejueshme në (2) dhe jep një vlerë të barabartë me n/2. Ne duam të tregojme se v = n/ 2, dmth behet fjale per optimalen.
(kemi supozuar grafikun e plotë, në përgjithësi nuk eshte e vërtetë se v = n / 2, të merret si shembull një grafik yll). Problemi dyfishtë i (2) eshte

$$
\begin{aligned}
d = \max \quad & \sum_{e \in E} y_e \\
& \sum_{e \in \delta(i)} y_e \leq 1 \qquad \forall i \in N \\
& y_e \geq 0 \qquad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

ku δ *(i)* eshte bashkësia e harqeve qe bien mbi nyjen *i*. Duke qene se grafiku eshte i plotë ekziston një qark Hamiltonian (prek të gjitha nyjet saktesisht një herë). Nëse u caktohet vlera e $y_e = 1 / 2$ harqeve te qarkut mund të shihet se kjo zgjidhje eshte e pranueshme dhe vlera e saj n /2. Pra, kemi

$$n/2 \leq d = v \leq n/2$$

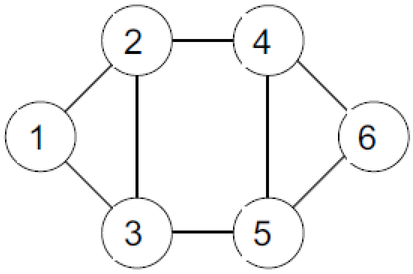
ku dy mosbarazimet janë për shkak të faktit se behet fjale për zgjidhje te mundshme. Pra duhet të jetë d = v = n / 2. Vlera optimale e (1) për një grafik të plotë është (n- 1) (për çdo bashkësi me n -2 nyje ose më e pakta mjafton të merren vetëm dy nyjet e përjashtuara, duke qene se grafiku është komplet ekziston harku midis dy nyjeve dhe ky hark nuk është i mbuluar nga bashkësia). Siç mund ta shikoni relaksimi i plotesis prodhon një kufi te poshtëm qe është gati gjysma e vlerës optimale! Në këtë rast, duke e ditur a priori se grafiku është i plotë, mund te shtojmë kufizimin

$$\sum_{i \in N} x_i \geq n - 1$$

dhe ne do të kemi barazinë midis optimales dhe relaksimit të saj. Por në përgjithësi te veprosh në këtë mënyrë nuk eshte e lehte. Duke pasur parasysh një grafik te cfaredoshem duhet të jemi në gjendje të njohim brenda ‘clique’ (nëngrafet komplete) K maksimale dhe për secilin prej tyre te shtohet një kufizim i llojit

$$\sum_{i \in K} x_i \geq |K| - 1$$

Kjo përmirëson ndjeshëm kufirin e poshtëm. Por të identifikohen clique maksimale është nga ana tjetër një problem NP-i vështirë dhe si rrjedhoje duhet të bëhet euristik.



Për shembull, është dhënë grafiku në figure, te zgjidhet (2). Te merret $x_i = 0.5$ për çdo nyje me vlerë optimale v = 3. Nëse shtohet kufizimi $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$ përftohet $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0.5$ me vlerë v = 3.5. Ky kufi i poshtëm mund të çohet në $\lceil 3.5 \rceil = 4$ duke qene se zgjidhja e problemit të mbulimit minimal duhet të jete e plote. Ky fakt dëshmon se mbulimi i përbëre nga nyjet {2,3,4,5} është optimal. Mund të shtojmë gjithashtu një kufizim shtesë $x_4 + x_5 + x_6 \geq 2$. Merret një zgjidhje e plote, pra optimale. Mund të provohet fakti i konsiderueshëm se (1) dhe (2) janë ekuivalente (në kuptimin se skajet optimale (2) janë të plotë) në qoftë se grafiku është dypalësh.

6.2 **Shembull**. Supozoni se tre variablat x_1, x_2, x_3 përfaqësojnë variabla logjike dhe se raporti të cilin ato duhet të plotësojnë jane si më poshtë

$$x_1 \vee x_2 \Longrightarrow \neg x_3 \tag{3}$$

Nëse variablat marrin vlerat 0 ose 1 (0 = e rreme dhe 1 =e vërtetë), vlerat e lejueshme te (3) janë:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 0, \\ x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 1, \\ x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 0, \\ x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, \\ x_1 = 1, & x_2 = 1, & x_3 = 0, \end{array}$$

Kjo bashkesi mund te përfaqësohet psh ne mënyrën e mëposhtme

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \{0,1\}^3 : x_1 + x_2 \leq 2\,(1 - x_3)\right\}$$

ose ne këtë mënyrën tjetër

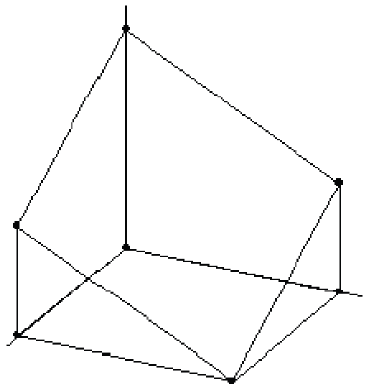
$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \{0,1\}^3 : x_1 \leq 1 - x_3; \quad x_2 \leq 1 - x_3\right\}$$

Është e njëjta gjë te përdorësh njërën apo tjetrën mënyrë? Ne momentin qe relaksohet kufizimi i plotësisë, duhet bere pyetja nëse te dy bashkësitë janë te njëjta me kufizimin e relaksuar. Dmth

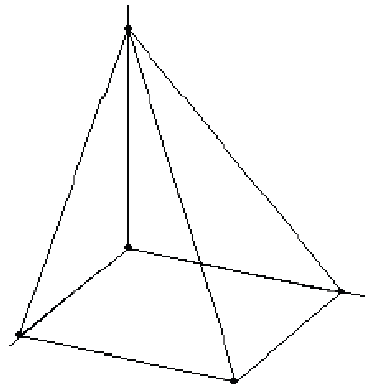
$$A := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in [0,1]^3 : x_1 + x_2 \leq 2\,(1 - x_3)\right\}$$

$$B := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in [0,1]^3 : x_1 \leq 1 - x_3; \quad x_2 \leq 1 - x_3\right\}$$

Siç mund të shihet nga figurat, A përmban B dhe ka dy skaje me koordinata te pjesshme qe B nuk ka. Pra të minimizosh A mund të japë minimume me te ulta se ato të marra nga minimizimi i B. Edhe pse për të përfaqësuar B ka nevojë për një numër më të madh të kufizimesh është me mirë të përdoret B, sepse merret kufi i poshtëm me i mirë.



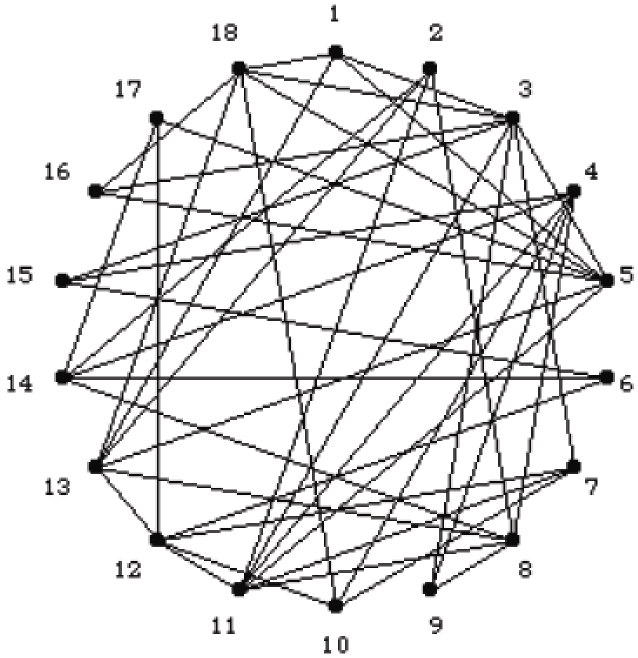
A



B

3- Enumerimi implicit.

Per te zgjidhur problemet e PLI është praktikë konstante te ndash bashkësinë e zgjidhjeve, duke zgjidhur probleme më te vegjël, derisa këto nuk janë zgjidhur (me një zgjidhje të plote), ose te provohet qe nuk nevojitet të zgjidhen sepse nuk përmbajnë zgjidhjen optimale. Ndarja e vazhduar e bashkësisë mund te çoje ne gjenerimin e një numri eksponencial nenproblemesh.
Një përdorim efikas i kufijve te poshtëm lejon reduktimin e numrit te nenproblemeve dhe kështu reduktohet koha e llogaritjes brenda kufijve të pranueshëm. Për të ilustruar karakteristikat kryesore të enumërimit implicit te konsiderohet një problem i PL0-1. Bashkesia i zgjidhjeve mund të përfaqësohet me një pemë binare në të cilin çdo nyje i është hequr një ndryshore të veçantë në dy vlerat e saj 0 dhe 1. Pema nuk eshte domosdoshmerisht e plotë sepse zgjedhjet e disa variablave mund të jenë te papranueshme, pavarësisht nga vlera e variablave të tjera (psh një kufizim $x_1 + x_2 \leq 1$ ben që zgjedhjet x_1: = 1 dhe x_2: = 1 ta bëjnë zgjidhjen te papranueshme dhe për këtë arsye nuk ka nevojë për të zgjerohet nenepema e saj). Megjithatë, edhe ulur pemen e të gjitha zgjedhjeve të papranueshme, numri i nyjeve mbetet shumë i lartë për një enumerim eksplicit. Celesi për të qenë në gjendje të eksplorojmë pemën e zgjidhjeve konsiston në të pasurin ne dispozicion një zgjidhje të realizueshme (të ashtuquajtur *detyrimi*) dhe ne provimin se ne një nenpeme nuk ka zgjidhje më të mirë se *detyrimi*, duke e bërë të panevojshem eksplorimin e nenpemes ne te cilin nyjet janë vetëm enumerime implicite. Dëshmia se në nenpeme nuk ka zgjidhje me te mira mund te kihet në qoftë se kemi një kufi me te vogël se ai optimali në nenpeme dhe kufiri i poshtëm eshte jo me i mire se ai *detyrimi*. Kjo ide e thjeshtë por efikase mund te zvogëloje eksplorimin e pemes në një numër të pranueshëm nyjesh. Derisa metoda te behet me te vertete efikase, eshte thelbesore që kufijtë e poshtem te jene te larta sa më shume te jete e mundur dhe te mund të kemi sa më shpejt *detyrime* të mira. Por mund te ndodhe gjithsesi, qe koha e llogaritjes te jete shumë e lartë. Në këto raste, duke krahasuar kufirin e poshtem me të ulët te disponueshem dhe *detyrimi*, njihet intervali brenda së cilës gjendet vlera optimale. Nëse ky interval eshte persa i përket përqindjes i vogël ("vogël ", sipas perceptimit subjektiv të vendimmarrësit) llogaritja mund të ndërpritet dhe pranohet si zgjidhje *detyrimi* (e cila mund të jetë i optimalja, jo akoma e 'caktuar 'si e tille).



6.3 SHEMBULL. Duhet te zgjidhet nje problem me mbulim minimal peshe te nyjeve për grafikun ne figure me kosto mbi nyjet

c = (5 3 2 4 7 6 12 10 3 5 3 4 2 11 7 9 10 15)

Si ne rastin e meparshem ne te cilin kerkohej mbulimi me kardinalitet minimal, problem modelohet me PLI. Pra duhet te zgjidhim

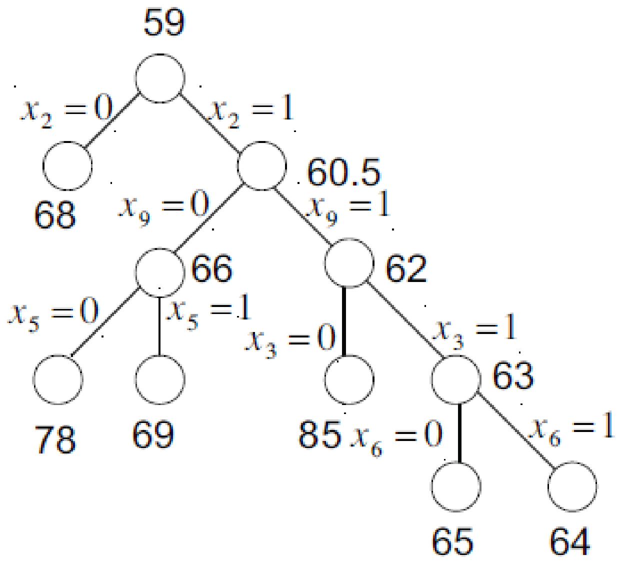
$$\begin{aligned} v = \min \ & \sum_{i \in N} c_i x_i \\ & x_i + x_j \geq 1 \qquad \forall (i,j) \in E \\ & x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in N \end{aligned} \tag{4}$$

Duke përdorur, per te gjeneruar kufizime te poshtme, relaksimi i plotesis

$$\begin{aligned} v' = \min \ & \sum_{i \in N} c_i x_i \\ & x_i + x_j \geq 1 \qquad \forall (i,j) \in E \\ & x_i \geq 0 \qquad \forall i \in N \end{aligned} \tag{5}$$

Duke zgjidhur (5) do të merret $\bar{x}_i = 0.5$, për çdo i, me vlerë optimale $\bar{v} = 59$. Duke zgjedhur x_2 si variabël në të cilën duhet te kryhen nënndarjet, merren duke vendosur x_2: = 0, zgjidhja e plote{1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} me vlerë v = 68. Kjo zgjidhje përbën *detyrimin* e parë. Ajo çfarë dihet deri në këtë moment është se optimalja gjendet në intervalin [59, 68]. Duke qene se zgjidhja e përftuar është e plote nuk ka nevoje te ndash më tej dhe mund të, konsiderohet alternativa x_2: 1 =. Përftohet një zgjidhje e pjesshme me vlere të v = 60.5 e cila i korrespondon një limiti më te ulët se 61. Prandaj intervali i devijimit reduktohet në [61, 68]. Duke ndare x_9 dhe vënë në x_9: = 0 merret një zgjidhje e pjesshme me vlerë 66. Duke qëne se 66 <68 duhet te ndahet, për shembull në x_5. Duke vënë x_5: = 0 merret një zgjidhje e plote me vlere 78, e cila pastaj hidhet poshte.

Duke vene x_5: = 1 merret një zgjidhje e pjesshëme me vlerë 69.5, me e keqe se *detyrimi* dhe keshtu qe nuk duhet të ndahet më tej. Tek pema e kërkimit, dhe mund te vendoset x_9: = 1 duke marre nje zgjidhje te pjesshme me vlere 63 (kjo e kufizon intervalin e panevojshem në [62, 68]). Duhet te ndajmë p.sh. ne x_3. Duke i dhene x_3: = 1 merret një zgjidhje e plote me vlere dhe 85 prandaj nuk merret parasysh. Ndërsa duke i dhene x_3: =1 ne marrim një zgjidhje e pjesshme me vlerë 63 (kjo e kufizon intervalin e panevojshem në [63, 68]). Duhet ndare psh x_6. Duke i dhene vleren x_6: = 0 merret zgjidhja e plote {1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} me vlerë 65. Behet fjale per *detyrim* te ri, pra intervali i panevojshem reduktohet në [63, 65]. Mbetet per tu llogaritur kur x_6: = 1. Merret zgjidhja {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16} me vlerë 64, domosdoshmërisht optimalja (intervali i panevojshem do të reduktohet në [64, 64]). Pema e kërkimit, eshte e përfaqësuar në figurë.



Per te ilustruar nevojën për përforcimin e kufirit te poshtëm me mosbarazime te duhurashtohen keto mosbarazime:
:

$$x_1 + x_3 + x_5 \geq 2, \qquad x_5 + x_{16} + x_{18} \geq 2, \qquad x_1 + x_3 + x_{18} \geq 2 \qquad (6)$$

Merret nje zgjidhje e pjesshme me vlere 63.5, pra me nje kufi te poshtem 64. Vini re permiresimin e ndjeshem lidhur me vleren 59 te perfutar me pare. Duke ndare x2 := 0 e x2 := 1 perftohen ne te dy rastet zgjidhje te plota me vlere respektivisht 68 dhe 64. Shtimi i mosbarazimit (6) reduktoi pemen e kërkimit ne vetem 3 nyje.

6.4 SHEMBULL. Shpesh ne një problem ka elemente simetrie qe prodhojnë shume zgjidhje ekuivalente. Per te zhdukur zgjidhjet ekuivalente, qe do te shkaktonin një kërkim te kot ne peme, duhet te modelohet problemi ne menyre qe te përjashtohen sa me shume te jene e mundur keto zgjidhje. Si shembull te merret parasysh problemi i llogaritjes se numrit kromatik te nje grafiku. Si kolorim i nje grafiku përkufizohet nje përcaktim i ngjyrave ne nyje ne menyre te tille qe dy nyje afterndenjese te jene jene me ngjyra te ndryshme. Numri kromatik eshte numri minimal i ngjyrave i nevojshem per te ngjyrosur nje grafik. Llogaritja e numrit kromatik eshte NP-hard, prandaj problemi mund te shqyrtohet me ane te PLI.
Te përcaktohen variablat ne vazhdim
x_{ci}:0={1 nqs ngjyra c i përcaktohet nyjes *i*
0 ndryshe
y_{ci}:0={1 nqs perdoret ngjyra c
0 ndryshe

Atehere nje kolorim mund te modelohet nga kufizimet e mëposhtme

$$\sum_c x_{ci} = 1$$

per cdo nyje *i*

nmq cdo nyje te kete nje ngjyre

$$x_{ci} + x_{cj} \leq 1$$ per cdo hark (*i,j*) dhe per cdo ngjyre *c*

per te ndaluar qe e njëjta ngjyre ti caktohet dy nyjeve aferndenjese,

$$x_{ci} \leq y_c$$ per cdo nyje *i* dhe per cdo ngjyre *c*

per ti dhene variablave y përdorimin e nje ngjyre kur kjo i caktohet nje nyje. Pra problemi i llogaritjes te numrit kromatik mund te modelohet si

$$\min \quad \sum_c y_c$$

$$\sum_c x_{ci} = 1$$ për çdo nyje *i*

$$x_{ci} + x_{cj} \leq 1$$ për çdo hark (*i,j*)

$$x_{ci} \leq y_c$$ për çdo nyje i dhe për çdo ngjyre c

$$x_{ci} \in \{0,1\}\,,\ y_c \in \{0,1\}$$

Vini re se për çdo zgjidhje që kërkon m ngjyra ka m! zgjidhje ekuivalente te fituara thjesht nga kombinimi i ngjyrave së bashku. Për më tepër, duke qene se numri i variablave y duhet të jetë domosdoshmërisht i përcaktuar në një vlerë me të larte se numri kromatik (një vlerë e sigurt është e barabartë me numrin e nyjeve), ndodh që në zgjidhje ngjyra të ndryshme nuk përdoren. Kjo krijon një brez të mëtejshëm të zgjidhjeve ekuivalente. Një mënyrë për të eliminuar (të paktën pjesërisht) kete fakt është duke para-caktuar nyjet e një harku ngjyrë 1 dhe 2 çfarëdo. Pastaj caktimi i ngjyrës në nyjen 3 është i kufizuar në ngjyrat 1, 2 dhe 3. Faktikisht ose ngjyra eshte e njëjta ne nyjet 1dhe 2 ose eshte një ngjyrë e ndryshme, në ketë rast mund te vendoset si 3. Në mënyrë të ngjashme, caktimi i ngjyrës në nyjen 4 është i kufizuar ne ngjyrat 1, 2, 3 dhe 4. Atëherë kufizimi i përcaktimit është i shndërruar në

$$\sum_{c=1}^{i} x_{ci} = 1$$ per cdo nyje i ≥ 3

Per problemin e dyte mund te perdoren ngjyrat me indeks me te ulet duke shtuar kufizimet

$$y_c \geq y_{c+1} \qquad c := 1, \ldots, n-1$$

(nëse nje ngjyre nuk përdoret, nuk përdoren as pasardhëset). Duke aplikuar modelin ne grafikun e mëparshëm përftohet një zgjidhje e parë e pjesshme me vlere 3. Variablat y kanë vlerat y1 = y2 = 1 (te paracaktuara), $y_3 = 0.5$, $y_4 = y_5 = 0.25$. Më pas ndahet duke imponuar $y_3 = 1$. Merret një zgjidhje me vlere të pjesshme 3.5 (duke gjeneruar një kufi te poshtëm te barabarte me 4). Duke imponuar $y_4 = 1$ marrim një zgjidhje te pjesshme të vlerës 4 dhe të plote në variablat y, por te pjesshme ne variablat x. Duke u dhënë me pas vlerat $x_{1;2} = 1$, $x_{1;4} = 1$, $x_{1;16} = 1$ përftohen dhe një here zgjidhje te pjesshme me vlere 4. Ne fund , duke i dhënë $x_{1;17} = 1$ përftohet zgjidhja pasardhëse e plote qe kërkon 4 ngjyra (eshte treguar ndarja e nyjeve ne katër ngjyra):

{1; 2; 4; 7; 16; 17} ; {3; 6; 10; 13} ; {9; 11; 14; 15; 18} ; {5; 8; 12}

Për të pasur konfirmimin se ky është kolorimi minimal duhet pare se çfarë ndodh duke imponuar $y_3 = 0$ (nyja e vetme e pemës së kërkimit me kufi te poshtem më të mirë se zgjidhja e gjetur). Por kufizimi yc ≥ yc+1, së bashku me $y_3 = 0$ korrespondon në kërkim vetëm dy ngjyra! Problemi nuk është i pranueshëm për $y_3 = 0$ dhe llogaritja përfundon me një pemë kërkimi shumë të kufizuar.

Metoda e përshkruar merr emrin branch-and-bound qe tregon rolin e madh te nënndarjeve (branch) dhe kufizimeve (bound). Nëse përfshihen edhe mosbarazimet per përforcimin e kufijve te poshtëm përdoret dhe termi branch-and-cut, ku termi 'cut' tregon faktin se mosbarazimet `nxjerrin 'jashtë bashkësisë se lejuar disa zgjidhje te pjesshme të padëshirueshme (si në rastin e mbulimit të nyjeve zgjidhja $x_i = x_j = x_k = 1 / 2$ në clique { (i, j), (i, k), (j, k) }). Metoda branch-and-bound pastaj vazhdon duke gjeneruar një numër subproblemesh në çdo nënndarje (ndarja mund te gjeneroje me shume se dy, edhe pse, me variablat 0-1 te gjeneroje dy subprobleme, eshte rasti më i zakonshëm). Këto çështje janë vendosur në një listë pritjeje nga të cilat ato janë marrë për zgjidhjen. Zgjidhja e një subproblemi nënkupton pikërisht te llogaritet një kufi i poshtem optimal per te (në përgjithësi duke zgjidhur relaksimin e plotesise), dhe, nëse është e mundur, te përdoret kjo llogaritje për të gjeneruar një zgjidhje të pranueshme dhe për të pasur një tregues se si të ndahen me tej subproblemet, nëse është e nevojshme. Lista e pritjes inicializohet me një subproblem te vetëm dhe problemin vetë. Algoritmi përfundon kur lista është bosh. Zgjedhja që problemi mund të marre nga lista e pritjes, mund të bëhet e varur nga kritere të ndryshme. Për shembull mund të vendoset për të punuar me kriterin last-in-first-out duke cuar në një kerkim në thellësi te pemës (si eshte bere në shembujt e mësipërm). Avantazhi i këtij kriteri eshte se numri i subproblemeve i gjeneruar mbetet i kufizuar (për shembull për një pemë binare nuk mund te kaloje thellësinë e pemes) dhe e cila gjendet me shpejtësi ne nje incombente fillestar (por sdo me thënë qe është i mirë). Një tjetër kriter konsiston në eksplorimin e gjerësisë se pemës duke përdorur metodën e first-in-first-out, por kjo në përgjithësi nuk është e rekomanduar për shkak se prodhohen shumë subprobleme. Përndryshe mund te zgjedhim subproblemim me kufirin e poshtem më të keq. Arsyet janë dy: tendenca për tu përmirësuar sa më shpejt kufiri i poshtem duke detyruar në këtë mënyrë skarcitetit dhe rritet probabiliteti per të gjetur shpejt optimalen, duke supozuar se ka nje korrelacion midis vlerës optimale dhe korrelacionit te saj. Me këtë kriter nuk vëmë një kufi te poshtem a priori ne numrin e subproblemeve prezente në listën e pritjes. Informacioni në lidhje me një subproblem mund të kufizohet në kufizimeve të veçanta të subproblemit (për shembull, cilat variabla janë të fiksuara në 0 ose 1 në një problem me variabla 0-1). Duke bërë kështu informacioni për çdo subproblem eshte shumë i reduktuar dhe lista e pritjes mund të përmbajë shumë subprobleme. Megjithatë, për të shpejtuar llogaritjen, duke marrë parasysh që shtoni vetem një kufizim për një problem tashmë të zgjidhur (jemi duke menduar për zgjidhjen PLI me relaksimin e PL) nuk është e leverdishme për të zgjidhur një subproblem por përfitohet më shumë po te nisemi nga zgjidhja optimale (e cila behet e papranueshme sa shtohet nje pengesë e ndarjes) dhe me një variant të përshtatshem të metodës simplex të merret optimalja me pak iteracione. Por kjo eshte e mundshme nëse kemi inversin e matricës bazë, e cila është ruajtur, për çdo subproblem. Kjo rrit kërkesat e memories se metodës branch-and-bound dhe shpjegon pse metoda mund të bllokojë për një përparim në kujtesën në dispozicion.