Kapitulli

Programimi linear: Karakteristika të përgjithshme.

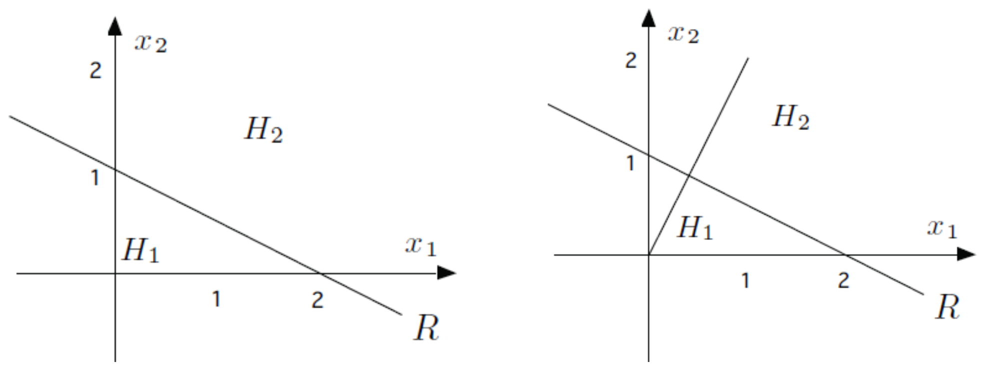
1- Karakteristikat gjeometrike.

Përkufizohen si probleme të Programimit Linear të gjitha ato probleme te optimizmit ku funksioni objektiv është linear dhe kufizimet janë të shprehura nga pabarazitë lineare dhe gjithashtu, ndoshta, nga barazitë lineare. Në mënyrë që të flasim për PL duhet të jenë gjithmonë te pranishme pabarazitë ndërkohë qe barazitë mund të mungojnë. Arsyeja për te cilën duhet të jenë te pranishme kufizimet e pabarazisë është për shkak të faktit se një problem vetëm me kufizimet e barazisë ka një strukturë shumë të veçantë: Funksioni objektiv i vlerësuar në zgjidhjet e mundshme është i pakufizuar ose konstante. Prandaj është e qartë se një model linear i një problemi të vërtetë ka gjithmonë kufizime pabarazie (p.sh. kufizimi i jo-negativitet të variablave). Marrim ne konsiderate atëherë rrugën në të cilën kufizimet e pabarazisë përcaktojnë strukturën e problemit. Na leverdis te fillojmë nga një problem me vetëm dy variabla x_1 x_2.

Një kufizim i tipit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

Përfaqëson një drejtëz R ne plan (dmth bashkësia e pikave që plotësojnë lidhjen). Drejtëza ndan planin në dy pjesë *H1* dhe *H2*. Shihni ne figurën 1 rasti $x_1 + 2x_2 = 2$. Në qoftë se vlerësohet (a_1x_1+ a_2x_2) në një pike çfarëdo të H1 merret domosdoshmërisht një vlerë tjetër nga b (përndryshe pika do të binte mbi R). Le të supozojmë se kjo vlerë është më e vogël se b. Mund te themi se për të gjitha vlerat e H1 vlera e $a_1x_1 + a_2x_2$ është më e vogël se b. Nëse konsiderojmë një tjetër pikë te H1 dhe te ndërtojnë një vije të gjithë në H1, duke i bashkuar dy pikat. Nëse vlera e ($a_1x_1 + a_2x_2$) në pikën e dytë është me e madhe se b, atëherë do të ishte një pikë në vije, në të cilën për vazhdimësi vlerat e $a_1x_1 + a_2x_2$ do të jetë e barabartë me b, por atehere kjo pikë duhet të jetë ne R, ndërsa vija tërësisht në H1.



Në mënyrë të ngjashme, ne mund të konkludojmë se pikat te H2 janë të gjitha më te mëdha sesa b ose të gjitha më pak se b. Për të kuptuar se cili nga këta dy rastet është i vërtetë, vërejmë se vektori i formuar nga koeficiente te ($a_1x_1 + a_2x_2$), pra (a_1, a_2) pingul me **R (Figura** 2), siç tregohet nga fakti se vija e drejtë paralele me R qe kalon nëpër origjinë dhe ka ekuacionin $a_1a_2 + x_1x_2 = 0$. Atëherë pikat e tipit $\alpha(a_1, a_2)$, me α nje numër skalar te çfarëdoshëm përfaqësojnë vijën e drejtë qe kalon nëpërmjet origjinës dhe Puna në R. Nëse ne vlerësojmë a1 a2 + X1 X2 të marrim Q? (A21 A22 +), nga të cilat ne shohim se janë më të mëdha se b pikat e gjysmë planit drejt të cilave është orientuar vektor i koeficientit (H_2 në këtë shembull), dhe më pak se b dy pikat e gjysmëplanit tjetër. Atëherë një kufizim i tipit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$$

përfaqëson një gjysmë plan. Te vihet re se kufiri i bashkësisë te pranueshme jepet nga drejtëza R. Ne pika te tilla, për te cilat mosbarazimi plotësohet si barazim, thuhet se mos barazia është *aktive*. Çdo pike tjetër, qe plotëson (2) si mosbarazim i ngushte (mosbarazim jo aktiv), nuk mund te jete tjetër veçse një pike e brendshme. Shtohen te tjera mosbarazime lineare, si psh

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &\leq 2 \\ -\,x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

(te shihet figura 3 ku drejtëza R_2 është $x_1+x_2=1$ dhe drejtëza R_3 është $x_1-x_2=1$)

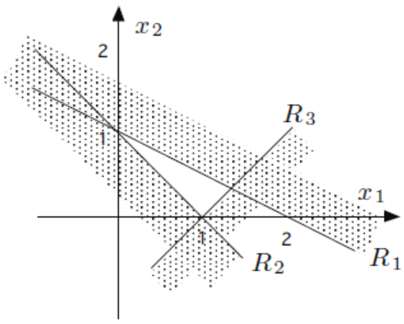


figura 3

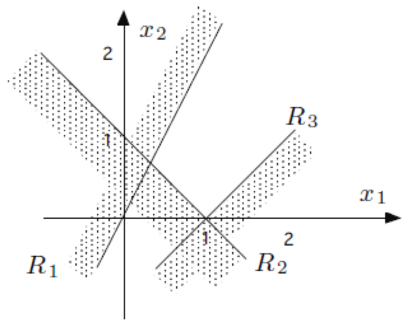


figura 4

Bashkesia e pranueshme jepet nga nderprerja e tre gjysmë planeve te përcaktuar nga mosbarazimet përkatëse si për shembull trekëndëshi në figurën 3. Kufiri eshte më kompleks se në rastin e një mosbarazimi të vetem. Përfshin qofte segmente, të quajtura kënde, ku eshte aktiv vetëm një mosbarazim, si dhe pika, të quajtura skaje ku jane aktive dy mosbarazime. Vini re se skajet kanë veçantinë të mos jenë të përfshira në asnjë segment tërësisht të lejueshem. Në këtë mënyrë është e mundshme të karakterizohen formalisht skajet lidhur me pikat e tjera të pranueshme. Për të llogaritur i skajet, duhet sigurisht llogaritur pikat e nderprerjes të drejtezave dy e nga dy. Në këtë shembull të thjeshtë ndodh qe tre pikat e llogaritura zgjidhin tre sistemet lineare

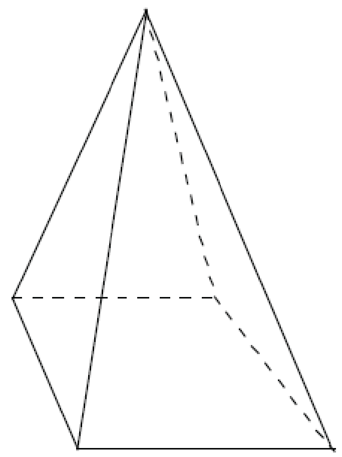
$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 2 \\ -\,x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\,x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(dmth respektivisht pikat (0, 1), (4/3, 1/3), (1, 0)) janë te pranueshme edhe ne lidhje me mosbarazimin që nuk ndërhyn në sistemin linear që përcakton këtë pikën. Kjo rrethanë eshte shume e vecante. Për shembull, nëse drejteza R1 do te jetë ajo e treguar në Figurën 4, dmth (3) te ishte

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

shihet se pika (-1; - 2) e ndërprerë nga drejtëza R1 me R3 është e papranueshme lidhur me mosbarazimin e mbetur. Siç shihet nga shembulli, bashkësia e pranueshme në dy dimensione eshte një poligon (jo domosdoshmërisht i kufizuar). Në përgjithësi, duke pasur m mosbarazime dhe në variabla, bashkësia e pranueshme është një shumëfaqësh. Nëse n≤ m (qe eshte rasti tipik), çdo bashkesi n mosbarazimesh aktive linearisht të pavarura përcaktojne një pikë. Gjithashtu, nëse kjo pikë eshte e lejueshme dhe në krahasim me m dhe n mosbarazime, është një kulm i poliedrit. Pikat e përcaktuara nga n-1 mosbarazime linearisht aktive formojne kendet ndersa pikat e përcaktuara nga nje mosbarazim i vetem aktiv formojne *faqet* (në dy dimensione kendet dhe faqet janë identike). Pika të pranueshme për të cilat asnjë mosbarazim nuk është aktiv, quhen pika te brendshme. Ekzistenca e pikave të brendshme lidhet me faktin se nuk ka ekuacione mes kufizimeve (padyshim një ekuacion eshte gjithmonë aktiv), por edhe për faktin se mund të ekzistojnë mosbarazime gjithnjë aktive për të gjitha pikat e pranueshme. Në këtë rast, kufizimet mund të riformulohen me ekuacione në vend të këtyre mosbarazimeve.

Nëse një mosbarazim nuk eshte asnjehere aktiv per asnjë pike te lejueshme, atehere eshte padyshim i tepërt dhe mund të largohet nga kufizimet pa ndikuar ne bashkësinë e lejuar. Për më tepër një mosbarazim eshte i tepert dhe në rastin në të cilin ekzistojne pikë të brendshme dhe nuk ekzistojne pikë për të cilat ky mosbarazim eshte i vetmi aktiv(Pse?). Mund te ndodhë që në një samit të jenë aktive më shume se n mosbarazime (jo të tepërta). Këto kulme janë quajtur te *degjeneruar*. Shihni në figure një shembull te kulmit te *degjeneruar*.



Pasi përcaktuam karakteristikat e bashkesise se lejuar le te marrim ne konsiderate funksionin objektiv.Nëse kjo eshte lineare (nga perkufizimi në PL), për shembull $\sum_j c_j x_j = c x$, pikat e ekuacionit cx = K formojnë një plan në të cilin funksioni objektiv eshte konstant me vlerë K. Pikët me vlerë K’ te funksionit objektiv përcaktojne planin cx = K’, paralel me të mëparshmin. Kuptohet se nëse plani cx = K ndërpret nje polieder, por jo një kulm, atëherë ekziston një tjetër plan cx = K’ qe ndërpret poliedrin me vlerë K’ <K (edhe pse karakteristika eshte intuitive, vertetimi i këtij fakti, i cila gjithashtu kërkon supozimin e ekzistimit të kulmeve, nuk eshte i thjeshtë dhe është hequr). Prandaj, pikat e poliedrit në drejtezen cx = K nuk janë optimale. Nënkuptohet se, në qoftë se jane optimale, të paktën një kulm eshte optimal. Kjo

karakteristike shpjegon pse është kaq e rëndësishme që te karakterizohen dhe llogariten kulmet e lejueshme te poliedrit në problemet e PL.